

CLASA A IV-A-

Problema 1

Se dă şirul de numere $1, 8, 15, 22, 29, \dots, 1401$.

- Câte numere sunt în șir?
- Ce număr se află pe poziția 51?
- Aflați trei numere consecutive din șir a căror sumă este 423.

Soluție

Se acordă 2 puncte din oficiu și 8 puncte pentru rezolvare.

a) $T_1 = 7 \times 0 + 1 = 1$

$$T_2 = 7 \times 1 + 1 = 8$$

$$T_3 = 7 \times 2 + 1 = 15$$

$$T_4 = 7 \times 3 + 1 = 22$$

$$T_5 = 7 \times 4 + 1 = 29$$

.....

$$T_{200} = 7 \times 199 + 1 = 1393 + 1 = 1394$$

$$T_{201}=7 \times 200+1 = 1400+1=1401$$

Şirul are 201 de numere.

3 p

b) $T_{51} = 7 \times 50 + 1 = 351$

2 p

c) $a + b + c = 423$

$$b = a + 7, \quad c = b + 7 = a + 14$$

$$a+b+c= a + (a+7)+ (a+14)= 423$$

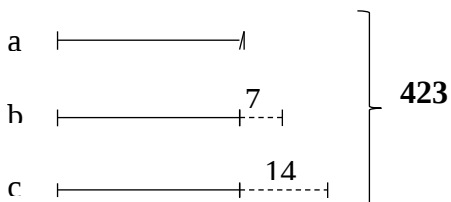
$$3x + 21 = 423 \rightarrow 3x = 423 - 21 \rightarrow 3x = 402 \rightarrow x = 402 : 3 \rightarrow x = 134$$

$$b=134 + 7 = 141, \quad c= 141 + 7=148$$

3 p

SAU

Reprezentare grafică



1 p

1. Egalăm părțile. $423 - 7 - 14 = 402$

0,5 p

2. Care este primul număr? $402 : 3 = 134$

0,5 p

3 .Care este al doilea număr? $134 + 7 = 141$

0,5 p

4 Care este al treilea număr? $141+7 = 148$

0,5 p

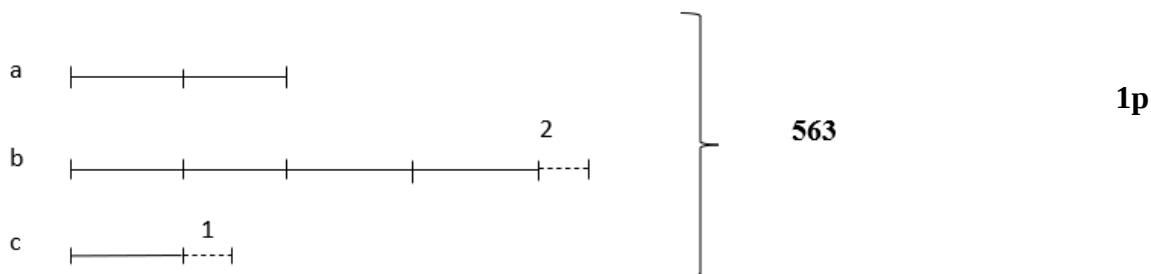
Problema 2

Suma a trei numere este 563. Al doilea număr este cu 2 mai mare decât dublul primului număr, iar al treilea este de 2 ori mai mic decât diferența primelor două numere. Aflați numerele.

Soluție

Se acordă 2 puncte din oficiu și 8 puncte pentru rezolvare.

$$a+b+c= 563, b=2a+2, c= (b-a) : 2$$



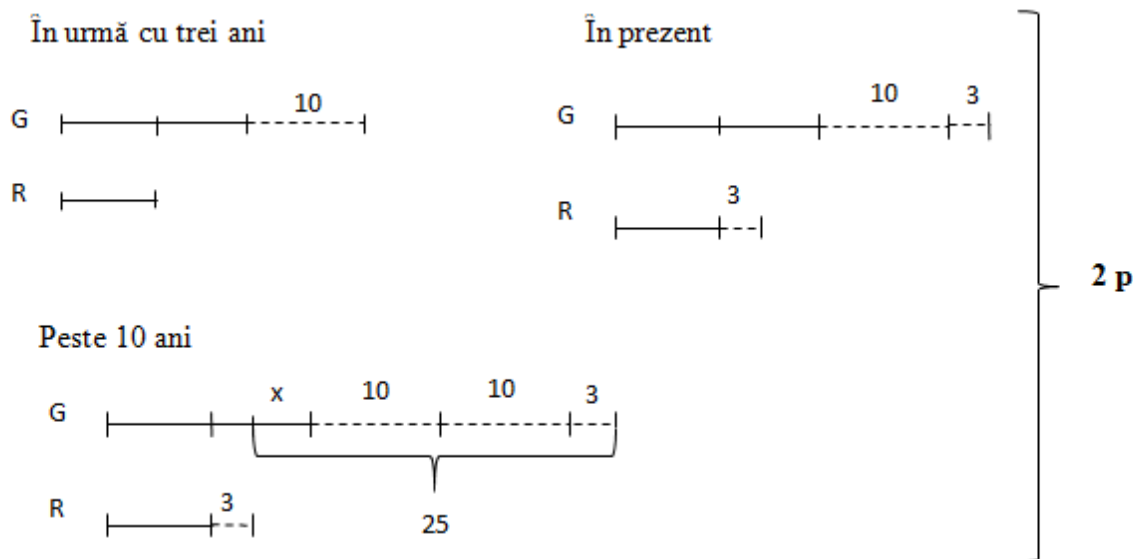
1. Egalarea părților.
 $563 - 3 = 560$ 2 p
2. Cât reprezintă o parte?
 $560 : 7 = 80$ 2 p
3. Care este primul număr?
 $80 \times 2 = 160$ 1 p
4. Care este al doilea număr?
 $80 \times 4 + 2 = 320 + 2 = 322$ sau $160 \times 2 + 2 = 320 + 2 = 322$ 1 p
5. Care este al treilea număr?
 $80 + 1 = 81$ sau $(322 - 160) : 2 = 162 : 2 = 81$ 1 p

Problema 3

În urmă cu trei ani, vârsta lui Gabriel era cu 10 ani mai mare decât dublul vârstei lui Radu. Dacă peste 10 ani vârsta lui Gabriel va fi cu 25 de ani mai mare decât vârsta actuală a lui Radu, află vârsta fiecărui băiat peste 6 ani.

Soluție

Se acordă 2 puncte din oficiu și 8 puncte pentru rezolvare.



1. Cât este x? $25 - 10 - 10 - 3 = 2$ 1 p
2. Cât reprezintă o parte? $2 + 3 = 5$ 1 p
3. Câți ani avea Radu în urmă cu 3 ani? $5 \times 1 = 5$ (ani) 0,5 p
4. Câți ani avea Gabriel în urmă cu 3 ani? $5 \times 2 + 10 = 20$ (ani) 0,5 p
5. Câți ani are Radu în prezent? $5 + 3 = 8$ (ani) 0,5 p
6. Câți ani are Gabriel în prezent? $20 + 3 = 23$ (ani) 0,5 p
7. Câți ani va avea Radu peste 6 ani? $8 + 6 = 14$ (ani) 1 p
8. Câți ani va avea peste 6 ani? $23 + 6 = 29$ (ani) 1 p

Notă: Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

Concursul Regional „Misterele matematicii”
Ediția a XVIII-a, 16.11.2024, Vaslui
CLASA A V-A-

Problema 1

Bogdan a cumpărat de ziua lui, pentru a-și servi colegii, banane și portocale, în valoare de 336 lei. Cantitatea de banane este de două ori și jumătate mai mare decât cea de portocale. Dacă 2 kg de banane și 2 kg de portocale costă 24 lei și prețul unui kilogram de portocale este cu 4 lei mai mic decât prețul unui kilogram de banane aflați greutatea fructelor cumpărate de Bogdan.

Soluție

Oficiu.....2p
 $p = \text{pret 1kg portocale}, b = \text{pret 1kg banane}$
 $2p + 2b = 24$, deci $p + b = 12$ și $p = b - 4$ rezultă că $p = 4$ lei și $b = 8$ lei.....3p
 Fie cantitatea de portocale $= 2x$, atunci cantitatea de banane este $5x$
 $4 \cdot 2x + 8 \cdot 5x = 336$2p
 $x = 7$ (kg).....1p
 Cantitatea de fructe este $2 \cdot x + 5 \cdot x = 49$ (kg).....2p
Obs. Rezolvarea prin metoda grafică se punctează cu maxim de puncte

Problema 2

Comparați numerele $(2024 - n)$ cu a^2 , știind că n verifică $20^{2020} = 10^{2000} \cdot 40^{20} \cdot 2^n$, iar numărul $x = 5^{a+2} + 3 \cdot 7^{2a+3} + 3^3 \cdot 5^a + 3^2 \cdot 7^{2a+1} + \overline{75a9}$ se împarte exact la 13.

Soluție

Oficiu.....2p
 $2^{2020} \cdot 10^{2020} = 10^{2020} \cdot 2^{40} \cdot 2^n$, adică $2^{2020} = 2^{n+40}$, deci $n = 1980$3p
 $x = 5^{a+2} + 3 \cdot 7^{2a+3} + 3^3 \cdot 5^a + 3^2 \cdot 7^{2a+1} + \overline{75a9}$ se scrie ca
 $x = 5^a(5^2 + 3^3) + 3 \cdot 7^{2a+1}(7^2 + 3) + \overline{75a9}$1p
 $x = 5^a \cdot 52 + 3 \cdot 7^{2a+1} \cdot 52 + \overline{a8} + 7501 = 13 \cdot [4 \cdot (5^a + 3 \cdot 7^{2a+1}) + 577] + \overline{a8}$2p
 Cum nr x se împarte exact la 13 dacă și numai dacă $\overline{a8}$ se împarte exact la 13
 Obținem soluția unică $\overline{a8} = 78 = 13 \cdot 6$, deci $a = 7$1p
 $\left. \begin{matrix} 2024 - n = 2024 - 1980 = 44 \\ a^2 = 49 \end{matrix} \right\} \rightarrow 2024 - n < a^2$1p

Problema 3

Fie șirul de numere naturale $n+1, n+2, \dots, n+2023$, unde n este număr natural.

- Arătați că pentru $n=1011$, suma numerelor din șir este pătratul unui număr natural.
- Determinați valorile posibile ale sumei resturilor obținute prin împărțirea la 3 a tuturor numerelor din șirul dat.

Soluție

Oficiu.....2p
 a) Suma nr din șir este $2023 \cdot n + 2023 \cdot 1012 = 2023(n + 1012)$2p
 Pentru $n=1011$, suma este $2023^2 = \text{pătrat perfect}$1p
 b) Dacă $n=3k$, k natural, atunci suma resturilor obținute prin împărțirea la 3 a nr din șir este
 $\underbrace{(1 + 2 + 0) + (1 + 2 + 0) + \dots + (1 + 2 + 0)}_{674 \text{ grupe}} + 1 = 2023$2p
 Dacă $n=3k+1$, k natural, atunci suma resturilor obținute prin împărțirea la 3 a nr din șir este
 $\underbrace{(2 + 0 + 1) + (2 + 0 + 1) + \dots + (2 + 0 + 1)}_{674 \text{ grupe}} + 2 = 2024$2p
 Dacă $n=3k+2$, k natural, atunci suma resturilor obținute prin împărțirea la 3 a nr din șir este
 $\underbrace{(0 + 1 + 2) + (0 + 1 + 2) + \dots + (0 + 1 + 2)}_{674 \text{ grupe}} + 0 = 2022$1p

Notă: Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

Concursul Regional „Misterele matematicii”
Ediția a XVIII-a, 16.11.2024, Vaslui
CLASA A VI-A-

Problema 1

Numerele naturale x, y, z satisfac simultan următoarele condiții:

- x și y sunt numere prime;
- $x^2 + y^2 + z(z+1)(z+2) = 522$.

Calculați valoarea produsului $x \cdot y \cdot z$.

Soluție

Oficiu.....2p

Produsul a trei nr naturale consecutive este divizibil cu 3.....1p

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z(z+1)(z+2) = 522 \\ z(z+1)(z+2) : 3 \\ 522 : 3 \end{array} \right\} \rightarrow (x^2 + y^2) : 3 \dots\dots\dots 1p$$

Pătratele perfecte dau resturile 0 sau 1 la împărțirea prin 3, deci $x^2 : 3$ și $y^2 : 3$2p

Cum x și y sunt prime rezultă că $x=y=3$1p

Ecuția devine $z(z+1)(z+2)=504$, care are soluția $z=7$2p

Valoarea produsului $x \cdot y \cdot z = 63$1p

Problema 2

Un număr $\overline{abc}$ se numește ”misterios” dacă restul împărțirii lui a la b este 1.

- a) Care este cel mai mare număr ”misterios” divizibil cu 6?
- b) Dacă $a < b$, câte numere ”misterioase” există?
- c) Dacă $a > b$, câte numere ”misterioase” există?

Soluție

Oficiu.....2p

- a) Cel mai mare nr ”misterios” $\overline{abc}$ este de forma $\overline{98c}$1p
Pentru a fi divizibil cu 6, numărul trebuie să fie divizibil cu 2 și 3.....1p

Deci, c =cifră pară și $(9+8+c) : 3$. Avem $c=4$ și $\overline{abc} = 984$1p

- b) Dacă $a < b$, $a:b=0$ rest a . Cum restul este 1 $\rightarrow a=1$ și $b \geq 2$1p

Deci, b poate lua 8 valori, iar c ia 10 valori. Există $1 \cdot 8 \cdot 10 = 80$ de astfel de numere.....1p

- c) Dacă $a > b$ atunci $a:b=d$ rest 1, cu $d \neq 0$ și $b > 1$

$b=2 \rightarrow a=2d+1$, deci $a \in \{3,5,7,9\}$

$b=3 \rightarrow a=3d+1$, deci $a \in \{4,7\}$

$b=4 \rightarrow a=4d+1$, deci $a \in \{5,9\}$

$b=5 \rightarrow a=5d+1$, deci $a \in \{6\}$

$b=6 \rightarrow a=6d+1$, deci $a \in \{7\}$

$b=7 \rightarrow a=7d+1$, deci $a \in \{8\}$

$b=8 \rightarrow a=8d+1$, deci $a \in \{9\}$

Cum c poate lua 10 valori, vom avea $10 \cdot (4+2+2+1+1+1+1) = 120$ de numere.....3p

Problema 3

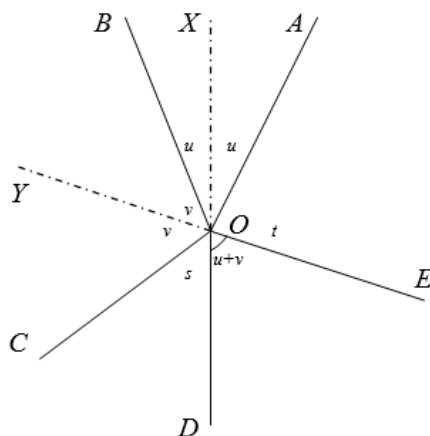
Fie $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOE$, $\angle EOA$ unghiuri în jurul unui punct O , astfel încât (OD este semidreaptă opusă bisectoarei unghiului $\angle AOB$ și (OE este semidreaptă opusă bisectoarei unghiului $\angle BOC$).

a) Dacă $m(\angle AOE) = 90^\circ$ și $m(\angle COD) = 60^\circ$, atunci demonstrați că ($\angle DOE$) este ascuțit și că unghiul dintre bisectoarele unghiurilor AOB și BOC este de 70° .

b) Dacă $m(\angle DOE) = 2 \cdot m(\angle COD) - 3 \cdot m(\angle EOA)$ atunci $3 \cdot m(\angle AOD) = 2 \cdot m(\angle COE)$.

Soluție

Oficiu.....2p



Notăm $m(\angle AOB) = 2u$, $m(\angle BOC) = 2v$, $m(\angle COD) = s$ și $m(\angle EOA) = t$.

a) Fie (OX bisectoarea $\angle AOB \Rightarrow m\angle XOA = m\angle XOB = \frac{m\angle AOB}{2} = u$

(OY bisectoarea $\angle BOC \Rightarrow m\angle BOY = m\angle YOC = \frac{m\angle BOC}{2} = v$1p

Rezultă $m(\angle DOE) = m(\angle XOY) = u + v$1p

$m(\angle DOE) = 180^\circ - 90^\circ - u = 90^\circ - u \Rightarrow m(\angle DOE) < 90^\circ$ 1p

$m\angle AOB + m\angle BOC + m\angle COD + m\angle DOE + m\angle EOA = 360^\circ$

Dacă $m(\angle AOE) = 90^\circ$ și $m(\angle COD) = 60^\circ$, atunci $3(u+v) = 210^\circ$ 1p

$(u+v) = 70^\circ \Rightarrow m\angle XOY = 70^\circ$1p

b) Din $m(\angle DOE) = 2 \cdot m(\angle COD) - 3 \cdot m(\angle EOA) \Rightarrow$

$\Rightarrow u + v = 2s - 3t \Rightarrow 3 \cdot (u + v) - 2 \cdot (u + v) = 2s - 3t \Rightarrow$ 1p

$\Rightarrow 3 \cdot (u + v) + 3 \cdot t = 2 \cdot s + 2 \cdot (u + v) \Rightarrow$ 1p

$\Rightarrow 3 \cdot (u + v + t) = 2 \cdot (s + u + v) \Rightarrow 3 \cdot m(\angle AOD) = 2 \cdot m(\angle COE)$ 1p

Notă: Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

Concursul Regional „Misterele matematicii”
Ediția a XVIII-a, 16.11.2024, Vaslui
CLASA A VII-A-

Problema 1

a) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$xy^2 + 2023y^2 = 2024$$

b) Determinați numerele de forma $\overline{abc}$ știind că $\frac{a+b}{1} = \frac{b+c}{4} = \frac{c+a}{5}$.

Soluție

Oficiu.....2p

a) Avem $y^2(x+2023) = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, de unde rezultă cazurile:.....2p

Cazul 1) $y^2=1$ și $x+2023=2024$, cu $(x,y) \in \{(1, 1), (1, -1)\}$ 1p

Cazul 2) $y^2=4$ și $x+2023=506$, cu $(x,y) \in \{(-1517, 2), (-1517, -2)\}$ 1p

b) Din $\frac{a+b}{1} = \frac{b+c}{4}$ obținem că $c = 4a + 3b$1p

Din $\frac{a+b}{1} = \frac{c+a}{5}$ obținem $c=4a+5b$1p

Din cele două relații avem că $b=0$ și $c=4a$1p

Numerele de forma $\overline{abc}$ care satisfac condițiile date sunt 104 și 208.....1p

Problema 2

Se dau numerele naturale nenule x și y astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2024}$.

a) Determinați mulțimea: $A = \left\{ x \in \mathbb{N}^* \mid \frac{xy}{x^2 + xy} \in \mathbb{N} \right\}$.

b) Arătați că numărul $a = \sqrt{\left(\frac{x}{4} - 506\right) \cdot \left(\frac{y}{4} - 506\right)}$ este natural.

Soluție

Oficiu.....2p

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2024} \Leftrightarrow 2024(x+y) = xy \Leftrightarrow \frac{xy}{x+y} = 2024 \Leftrightarrow$2p

$\Leftrightarrow \frac{xy}{x^2+xy} = \frac{2024}{x} \in \mathbb{N}$ 1p

$\Rightarrow x \in \{1, 2, 4, 8, 11, 22, 23, 44, 46, 88, 92, 184, 253, 506, 1012, 2024\}$2p

b) $a = \sqrt{\frac{(x-2024)(y-2024)}{16}} = \frac{1}{4} \sqrt{xy - 2024(x+y) + 2024^2} = \frac{1}{4} \sqrt{xy - xy + 2024^2}$2p

$a = 506 \in \mathbb{N}$1p

Problema 3

Dreptele AB și CD sunt concurente în O și $m\angle AOC = 45^\circ$. Dacă $AB \perp BD$, $AC \perp CD$ și notăm cu M, N, P mijloacele segmentelor (AO), (OD) și respectiv (BC), demonstrați că $\triangle MNP$ este dreptunghic isoscel.

Soluție

Oficiu.....2p

(CM) și (BN) sunt mediane în $\triangle ACO$ și $\triangle BDO$ sunt dreptunghice isoscele de baze (AO), respectiv (DO),

implică că (CM) și (BN) sunt și înălțimi.....1p

$\triangle BMC$ dreptunghic și (MP) mediana corespunzătoare ipotenuzei $\rightarrow MP = BC/2$1p

$\triangle BNC$ dreptunghic și (NP) mediana corespunzătoare ipotenuzei $\rightarrow NP = BC/2$1p

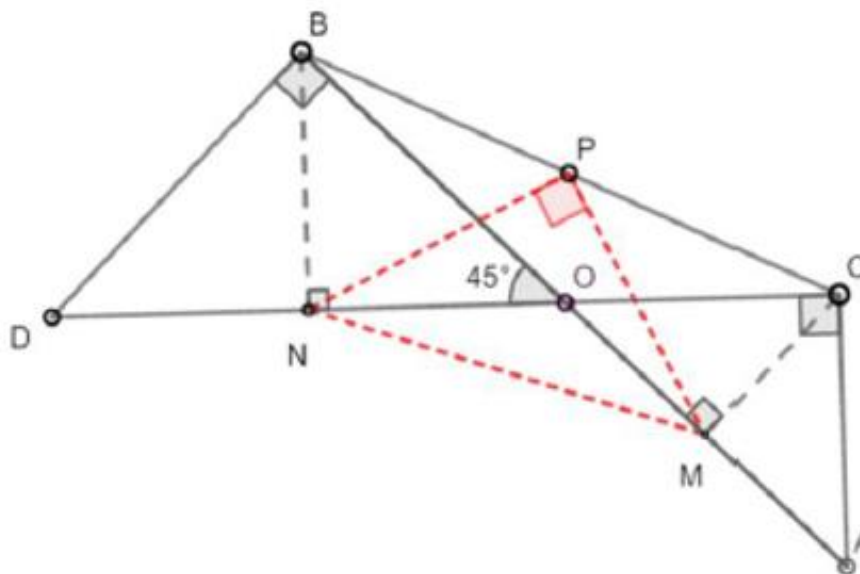
Deci, $MP = NP \rightarrow \triangle MNP$ isoscel.....1p

$\left. \begin{array}{l} \triangle PNC \text{ isoscel} \\ \angle BPN \text{ exterior } \triangle PNC \end{array} \right\} \rightarrow m\angle BPN = 2m\angle PCN$ 1p

$\left. \begin{array}{l} \triangle PBM \text{ isoscel} \\ \angle MPC \text{ exterior } \triangle PBM \end{array} \right\} \rightarrow m\angle MPC = 2m\angle PBM$ 1p

$\angle BON \text{ exterior } \triangle BOC \rightarrow 2m\angle PCN + 2m\angle PBM = 2 \cdot \angle BON = 90^\circ$1p

$m\angle NPM = 180^\circ - (2m\angle PCN + 2m\angle PBM) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, deci $\triangle MNP$ dreptunghic isoscel.....1p



Notă: Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.