

Concursul Regional „Misterele matematicii”

Ediția a XVII-a, 18.11.2023, Vaslui

CLASA A IV-A

Problema 1

Se consideră numărul $N = 5051525354 \dots 118119120$, format din scrierea numerelor de la 50 la 120, în ordine crescătoare. Află:

- a) câte cifre are numărul N ;
- b) suma cifrelor numărului N .

Problema 2

Trei prieteni au mers la cumpărături. După ce primul a cheltuit 25 de lei, al doilea 14 lei și al treilea 21 de lei, au constatat că le-au rămas sume egale de bani, iar dacă adunau toți banii rămași ar fi fost de 2 ori mai mulți decât cei cheltuiți împreună. Află câți lei a avut fiecare la început.

Problema 3

Suma a trei numere este 810.

Află numerele știind că: dacă micșorăm treimea primului număr cu 1, cu 3 treimea celui de-al doilea număr și cu 5 treimea celui de-al treilea număr, obținem numere consecutive impare.

Concursul Regional „Misterele matematicii”

Ediția a XVII-a, 18.11.2023, Vaslui

CLASA A V-A

Problema 1

Intr-o familie sunt 3 copii: Alexandru, Ionel și Cristina. Alexandru este cu un an mai mic decât Ionel, iar Ionel este cu 2 ani mai mare decât Cristina. Ce vârstă are în prezent fiecare copil, dacă acum un an suma vârstelor lor a fost 12 ani?

Problema 2

Determinați numerele de trei cifre pentru care, suprimând cifra zecilor, obținem un număr de 13 ori mai mic.

Problema 3

Suma a 10 numere naturale este 2008. Împărțind fiecare dintre aceste numere la numărul natural nenul n , obținem resturi egale cu 2 sau 3. Suma tuturor acestor resturi este egală cu 27.

- Câte resturi, din cele 10, sunt egale cu 2?
- Determinați cel mai mic număr n care verifică condițiile din enunț.

Concursul Regional „Misterele matematicii”

Ediția a XVII-a, 18.11.2023, Vaslui

CLASA A VI-A

Problema 1

Suma a trei numere naturale este 2007. Împărțind al treilea număr la suma primelor două numere, se obține câtul 20 și restul 12. Dacă cel mai mare divizor comun al primelor două numere este 19, să se determine cele trei numere.

Problema 2

Se consideră mulțimea $A \subset \mathbb{N}$ ale cărei elemente verifică simultan relațiile:

- a) $1 \in A$;
- b) Dacă $x \in A$, atunci $(2x + 3) \in A$;
- c) Dacă $(3x + 1) \in A$, atunci $x \in A$.

I. Verificați dacă numerele 5 și 13 se găsesc în A ;

II. Demonstrați că numerele 20, 60, 61 și 2013 se găsesc în A .

Problema 3

Unghiurile $\angle AOC$ și $\angle COB$ sunt adiacente suplimentare, iar punctele C și D sunt de o parte și de cealaltă a dreptei AO , astfel încât $m(\angle COD) = 100^\circ$ și $m(\angle BOD) = 3 \cdot m(\angle AOC) < 180^\circ$.

- a) Aflați măsurile unghiurilor $\angle AOC$, $\angle COB$ și $\angle BOD$.
- b) Aflați măsura unghiului format de $(OE, bisectoarea \angle AOD)$ și semidreapta opusă semidreaptei $(OC$.
- c) În sensul opus mișcării acelor de ceasornic, pornind din B , construiți unghiurile $\angle BOM_1$, $\angle M_1OM_2$, ..., $\angle M_{19}OM_{20}$. Știind că măsurile acestor unghiuri sunt numere naturale consecutive (exprimate în grade), iar primul unghi are 1° , demonstrați că semidreptele OM_{20} și OE coincid.

Concursul Regional „Misterele matematicii”

Ediția a XVII-a, 18.11.2023, Vaslui

CLASA A VII-A

Problema 1

Fie n un număr natural nenul. Se consideră numerele raționale:

$$A = \frac{3}{2^n + 2^{n+1}}, B = \frac{7}{2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}} \text{ și } C = \frac{2^n + (-2)^n - 4^n - (-4)^n}{2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n}.$$

- a) Arătați că $A=B$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
- b) Să se calculeze $(A+B) \cdot C$.

Problema 2

- a) Câte triplete (x, y, z) cu $x, y, z > 0$ și $\sqrt{\overline{x,y(z)} + \overline{y,z(x)} + \overline{z,x(y)}} \in \mathbb{Q}$ există?
- b) Să se afle numărul natural $\overline{abc}$ astfel încât $\sqrt{1 + 3 + 5 + \dots + \overline{abc}} = \overline{cba}$.

Problema 3

Fie triunghiurile ABC și ADE cu $m\angle BAC = m\angle DAE = 90^\circ$, care nu au interioare comune. Fie M, N, P, Q mijloacele segmentelor BC, CD, DE , respectiv EB . Arătați că:

- a) $2MP \leq BC + DE$;
- b) Dacă $EC \perp BD$, arătați că patrulaterul $MNPQ$ este dreptunghi.

Concursul Regional „Misterele matematicii”
Ediția a XVII-a, 18.11.2023, Vaslui
CLASA A V-A-

Problema 1

Intr-o familie sunt 3 copii: Alexandru, Ionel și Cristina. Alexandru este cu un an mai mic decât Ionel, iar Ionel este cu 2 ani mai mare decât Cristina. Ce vârstă are în prezent fiecare copil, dacă acum un an suma vârstelor lor a fost 12 ani?

Soluție

Oficiu.....2p
 Fie a, i, c vârstele celor 3 copii. Atunci $a=i-1$, $i=c+2$1p
 $a+i+c=12+3$2p
 $a=i-1=c+1$1p
 $c+1+c+2+c=15$1p
 $c=4$1p
 $i=6$1p
 $a=5$1p

Problema 2

Determinați numerele de trei cifre pentru care, suprimând cifra zecilor, obținem un număr de 13 ori mai mic.

Soluție

Oficiu.....2p
 Dacă numărul este $\overline{abc}$, atunci $\overline{abc} = 13 \cdot \overline{ac}$1p
 $10b=30a+12c$1p
 Deci, $c=0$ sau $c=5$2p
 Dacă $c=0$, atunci $b=3a$, deci nr sunt 130,260,390.....2p
 Dacă $c=5$, atunci $b=3a+6$, deci nr este 195.....2p

Problema 3

Suma a 10 numere naturale este 2008. Împărțind fiecare dintre aceste numere la numărul natural nenul n , obținem resturi egale cu 2 sau 3. Suma tuturor acestor resturi este egală cu 27.

- a) Câte resturi, din cele 10, sunt egale cu 2?
- b) Determinați cel mai mic număr n care verifică condițiile din enunț.

Soluție

Oficiu.....2p
 a) $a_1+a_2+\dots+a_{10}=2008$ și $a_i=n \cdot c_i+r_i$, cu $r_i \in \{2,3\}$, $r_i < n$1p
 Dacă x este nr de numere cu rest 2 și y este nr de numere cu rest 3, atunci $2x+3y=27$
 și $x+y=10$1p
 Aflăm $x=3$ și $y=7$1p
 b) $a_1+a_2+\dots+a_{10}=2008$, deci $(n \cdot c_1+r_1)+(n \cdot c_2+r_2)+\dots+(n \cdot c_{10}+r_{10})=2008$1p
 $n(c_1+c_2+\dots+c_{10})+27=2008$2p
 $n(c_1+c_2+\dots+c_{10})=1981$. Cum $n>3$, aflăm cel mai mic $n=7$2p

Notă: Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

Concursul Regional „Misterele matematicii”
Ediția a XVII-a, 18.11.2023, Vaslui
CLASA A VI-A

Problema 1

Suma a trei numere naturale este 2007. Împărțind al treilea număr la suma primelor două numere, se obține câtul 20 și restul 12. Dacă cel mai mare divizor comun al primelor două numere este 19, să se determine cele trei numere.

Soluție

Oficiu.....2p
 $a+b+c=2007$ și $c=20(a+b)+12$, $12 < a+b$1p
 $21(a+b)=1995$, deci $a+b=95$, $c=1912$1p
 $a=19x$, $b=19y$, cu $(x,y)=1$ implică $x+y=5$2p
Dacă $x=1$, $y=4$, $a=19$, $b=76$, $c=1912$1p
Dacă $x=2$, $y=3$, $a=38$, $b=57$, $c=1912$1p
Dacă $x=3$, $y=2$, $a=57$, $b=38$, $c=1912$1p
Dacă $x=4$, $y=1$, $a=76$, $b=19$, $c=1912$1p

Problema 2

Se consideră mulțimea $A \subset \mathbb{N}$ ale cărei elemente verifică simultan relațiile:

- a) $1 \in A$;
 - b) Dacă $x \in A$, atunci $(2x + 3) \in A$;
 - c) Dacă $(3x + 1) \in A$, atunci $x \in A$.
- I. Verificați dacă numerele 5 și 13 se găsesc în A ;
- II. Demonstrați că numerele 20, 60, 61 și 2013 se găsesc în A .

Soluție

Oficiu.....2p
I. Din a) $\Rightarrow 2 \cdot 1 + 3 = 5 \in A$1p
 $5 \in A$ și b) $\Rightarrow 2 \cdot 5 + 3 = 13 \in A$1p
II. $2 \cdot 13 + 3 = 29 \in A$, $2 \cdot 29 + 3 = 61 \in A$1p
 $61 = 3 \cdot 20 + 1$ și (c) $\Rightarrow 20 \in A$2p
 $\Rightarrow 2 \cdot 20 + 3 = 43 \in A$ și (b) $\Rightarrow 2 \cdot 43 + 3 = 89 \in A$ și (b) $\Rightarrow 2 \cdot 89 + 3 = 181 \in A$
Din $181 = 3 \cdot 60 + 1 \in A$ și (c) $\Rightarrow 60 \in A$2p
 $60 \in A$ și (b) $\Rightarrow 2 \cdot 60 + 3 = 123 \in A$ și (b) $\Rightarrow 2 \cdot 123 + 3 = 249 \in A$ și (b)
 $\Rightarrow 2 \cdot 249 + 3 = 501 \in A$ și (b) $\Rightarrow 2 \cdot 501 + 3 = 1005 \in A$ și (b) $\Rightarrow$
 $2 \cdot 1005 + 3 = 2013 \in A$1p

Problema 3

Unghiurile $\angle AOC$ și $\angle COB$ sunt adiacente suplementare, iar punctele C și D sunt de o parte și de cealaltă a dreptei AO , astfel încât $m(\angle COD) = 100^\circ$ și $m(\angle BOD) = 3 \cdot m(\angle AOC) < 180^\circ$.

a) Aflați măsurile unghiurilor $\angle AOC$, $\angle COB$ și $\angle BOD$.

b) Aflați măsura unghiului format de $(OE, \text{bisectoarea } \angle AOD \text{ și semidreapta opusă semidreaptei } [OC)$.

c) În sensul opus mișcării acelor de ceasornic, pornind din B , construiți unghiurile $\angle BOM_1, \angle M_1OM_2, \dots, \angle M_{19}OM_{20}$. Știind că măsurile acestor unghiuri sunt numere naturale consecutive (exprimate în grade), iar primul unghi are 1° , demonstrați că semidreptele OM_{20} și OE coincid.

Soluție

Oficiu.....2p

Desen1p

a) $m(\angle AOD) = 100^\circ - m(\angle AOC)$, iar $m(\angle AOD) + m(\angle BOD) = 180^\circ$1p

Obținem $m(\angle AOC) = 40^\circ$, $m(\angle COB) = 140^\circ$ și $m(\angle BOD) = 120^\circ$1p

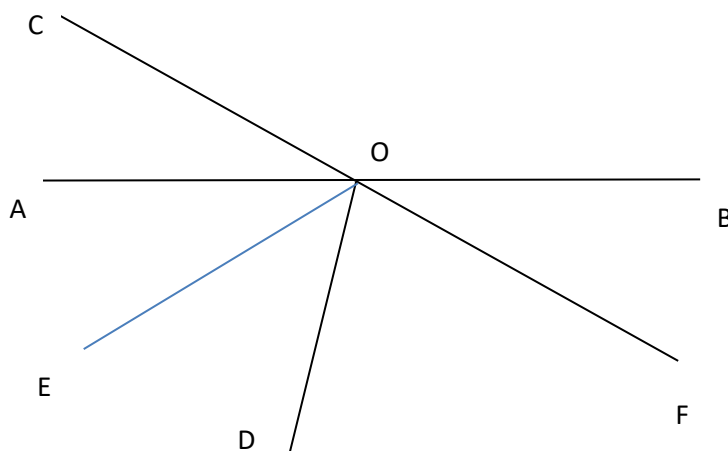
b) fie $(OE \text{ bisectoarea } \angle AOD, \text{ atunci } \angle AOE = \angle EOD = \angle AOD : 2 = 30^\circ$1p

$(OF \text{ și } (OC \text{ opuse implică } \angle COF \text{ alungit, deci } \angle DOF = 80^\circ$ 1p

$\angle EOF = \angle EOD + \angle DOF = 110^\circ$ 1p

c) Suma măsurilor celor 20 de unghiuri este $1^\circ + 2^\circ + \dots + 20^\circ = 210^\circ$ 1p

Dar, $m(\angle BOA) + m(\angle AOE) = 210^\circ$, deci, $(OM_{20} \text{ și } (OE \text{ coincid$ 1p



Notă: Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

Concursul Regional „Misterele matematicii”
Ediția a XVII-a, 18.11.2023, Vaslui
CLASA A VII-A

Problema 1

Fie n un număr natural nenul. Se consideră numerele raționale:

$$A = \frac{3}{2^n + 2^{n+1}}, B = \frac{7}{2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}} \text{ și } C = \frac{2^n + (-2)^n - 4^n - (-4)^n}{2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n}.$$

a) Arătați că $A=B$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se calculeze $(A+B) \cdot C$.

Soluție

Oficiu.....2p

a) Calculăm $A = B = \frac{1}{2^n}$2p

b) Calculăm suma $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1)$1p

Studiem două cazuri:

Dacă $n=\text{par}$, atunci $C = \frac{2^n + 2^n - 4^n - 4^n}{2(2^n - 1)} = -2^n$2p

Dacă $n=\text{impar}$, atunci $C = \frac{2^n - 2^n - 4^n + 4^n}{2(2^n - 1)} = 0$2p

Deci, $(A + B) \cdot C = \begin{cases} -2, & \text{dacă } n = \text{par} \\ 0, & \text{dacă } n = \text{impar} \end{cases}$1p

Problema 2

a) Câte triplete (x, y, z) cu $x, y, z > 0$ și $\sqrt{\overline{x,y(z)} + \overline{y,z(x)} + \overline{z,x(y)}} \in \mathbb{Q}$ există?

b) Să se afle numărul natural $\overline{abc}$ astfel încât $\sqrt{1 + 3 + 5 + \dots + \overline{abc}} = \overline{cba}$.

Soluție

Oficiu.....2p

a) $\overline{x,y(z)} + \overline{y,z(x)} + \overline{z,x(y)} = \frac{100(x+y+z)}{90}$ 1p

$$\sqrt{\overline{x,y(z)} + \overline{y,z(x)} + \overline{z,x(y)}} = \frac{10}{3} \sqrt{\frac{x+y+z}{10}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x+y+z = 10k^2$$

$3 \leq x+y+z \leq 27 \Rightarrow k=1 \Rightarrow x+y+z=10$ 2p

pt $x=1$ avem 8 soluții, pt. $x=2$ avem 7 soluții, ..., pt. $x=8$ avem 1 soluție

$\Rightarrow 1+2+\dots+8=36$ soluții1p

b) $\overline{abc} = 2k-1$ 1p

$$S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2k-1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 2k-2 + (1 + 2 + \dots + k) =$$

$$= k(2k+1) - k(k+1) = k^2 \text{1p}$$

$k = \overline{cba} \Rightarrow 2\overline{cba} - 1 = \overline{abc} \Rightarrow c$ impar și $c < 5 \Rightarrow c \in \{1, 3\}$ 1p

$c=1 \Rightarrow 2 \cdot \overline{1ba} = \overline{ab2}$ imposibil

$c=3 \Rightarrow 2 \cdot \overline{3ba} = \overline{ab4} \Rightarrow a=7, b=9 \Rightarrow \overline{abc}=793$ 1p

Problema 3

Fie triunghiurile ABC și ADE cu $m\angle BAC = m\angle DAE = 90^\circ$, care nu au interioare comune. Fie M, N, P, Q mijloacele segmentelor BC, CD, DE, respectiv EB. Arătați că:

- $2MP \leq BC + DE$;
- Dacă $EC \perp BD$, arătați că patrulaterul MNPQ este dreptunghi.

Soluție

Oficiu.....2p

a) $\triangle ABC$ dreptunghic și AM mediană $\rightarrow AM = \frac{BC}{2}$1p

$\triangle ADE$ dreptunghic și AP mediană $\rightarrow AP = \frac{DE}{2}$1p

În $\triangle AMP$ avem că $MP < AM + AP$, adică $MP < \frac{BC}{2} + \frac{DE}{2}$, $2MP < BC + DE$2p

Dacă P, A, M sunt coliniare, atunci $MP = AM + AP$, deci $2MP = BC + DE$

Cele două relații conduc la $2MP \leq BC + DE$1p

b) MN linie mijlocie în $\triangle CDB \rightarrow MN = \frac{DB}{2}$ și $MN \parallel DB$

PQ linie mijlocie în $\triangle EDB \rightarrow PQ = \frac{DB}{2}$ și $PQ \parallel DB$, deci, MNPQ paralelogram.....1p

$\left. \begin{array}{l} \text{PN linie mijlocie în } \triangle CDE \rightarrow PN \parallel CE \\ EC \perp BD \end{array} \right\} \rightarrow PN \perp BD$

$\left. \begin{array}{l} MN \parallel BD \\ PN \perp BD \end{array} \right\} \rightarrow PN \perp MN$1p

$\left. \begin{array}{l} \text{MNPQ paralelogram} \\ PN \perp MN \end{array} \right\} \rightarrow \text{MNPQ dreptunghi}$1p

Notă: Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

Concursul Regional „Misterele matematicii”
Ediția a XVII-a, 18.11.2023, Vaslui
CLASA A IV-A

Problema 1

Se consideră numărul $N = 5051525354 \dots 118119120$, format din scrierea numerelor de la 50 la 120, în ordine crescătoare. Află:

- a) câte cifre are numărul N ;
- b) suma cifrelor numărului N

Soluție

Oficiu-2p

1. De la 50 la 99 sunt 50 de numere de 2 cifre

$$2 \times 50 = 100 \text{ (cifre)}$$

1, 5 p

2. De la 100 la 120 sunt 21 de numere de 3 cifre

$$3 \times 21 = 63 \text{ (cifre)}$$

1, 5 p

3. Câte cifre are numărul N ?

$$100 + 63 = 163 \text{ (cifre)}$$

1 p

4. Care este suma cifrelor numerelor de la 50 la 99?

$$5 \times 10 + 6 \times 10 + 7 \times 10 + 8 \times 10 + 9 \times 10 + 5 \times (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 350 + 225 = 575$$

1, 5 p

5. Care este suma cifrelor numerelor de la 100 la 120?

$$1 \times 10 \times 3 + 0 \times 10 + 2 \times (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) + 1 + 2 = 30 + 0 + 2 \times 45 + 3 = 123$$

1, 5 p

6. Care este suma cifrelor numărului N ?

$$575 + 123 = 698$$

1 p

Problema 2

Trei prieteni au mers la cumpărături. După ce primul a cheltuit 25 de lei, al doilea 14 lei și al treilea 21 de lei, au constatat că le-au rămas sume egale de bani, iar dacă adunau toți banii rămași ar fi fost de 2 ori mai mulți decât cei cheltuiți împreună. Află câți lei a avut fiecare la început.

Soluție

Oficiu-2p

a $\overline{\hspace{1.5cm}} \xrightarrow{x} \text{---} 25 \text{---}$

1 p

b $\overline{\hspace{1.5cm}} \xrightarrow{x} \text{---} 14 \text{---}$

c $\overline{\hspace{1.5cm}} \xrightarrow{x} \text{---} 21 \text{---}$

1. Care este suma de bani rămasă celor trei copii?

$$2 \times (25 + 14 + 21) = 2 \times 60 = 120 \text{ (lei)}$$

2 p

2. Care este suma de bani rămasă fiecărui copil?

$$120 : 3 = 40 \text{ (lei)}$$

2 p

3. Câți lei a avut primul copil?

- | | |
|--------------------------------------|-----|
| 40+25=65 (lei) | 1 p |
| 4. Câți lei a avut al doilea copil? | |
| 40+14=54 (lei) | 1 p |
| 5. Câți lei a avut al treilea copil? | |
| 40+21=61 (lei) | 1 p |

Problema 3

Suma a trei numere este 810.

Află numerele știind că: dacă micșorăm treimea primului număr cu 1, cu 3 treimea

celui de-al doilea număr și cu 5 treimea celui de-al treilea număr, obținem numere consecutive impare.

Soluție

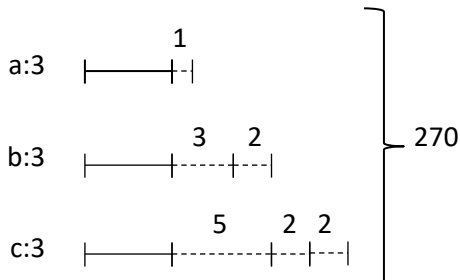
Oficiu-2p

$$a+b+c=810$$

1. Care este suma treimilor celor trei numere?

$$a: 3+b: 3+c: 3= 810: 3=270$$

1,5 p



1,5 p

2. Egalarea părților

$$270-(1+3+2+5+2+2)=270-15=255$$

1 p

3. Cât reprezintă o parte?

$$255:3= 85$$

1 p

4. Care este treimea primului număr?

$$85+1=86$$

0,5 p

5. Care este primul număr?

$$86 \times 3= 258$$

0,5 p

6. Care este treimea celui de-al doilea număr?

$$85+2+5= 90$$

0,5 p

7. Care este al doilea număr?

$$90 \times 3=270$$

0,5 p

8. Care este treimea celui de-al treilea număr?

$$85+5+2+2=94$$

0,5 p

9. Care este al treilea număr?

$$94 \times 3=282$$

0,5 p

Notă: Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.